UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 730 B

Nombre: ______________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que:

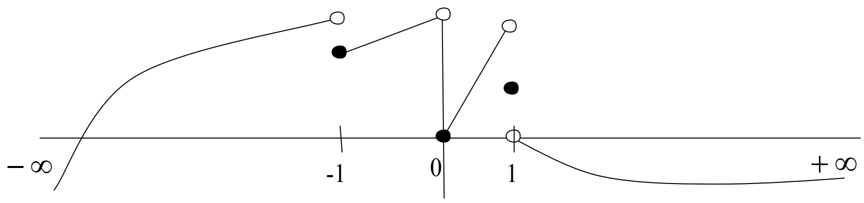
$$\lim_{x\to 5} f(x) = -1 \quad y \quad \lim_{x\to 7} g(x) = 3$$

Hallar $\displaystyle \lim_{x\to 7} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$, indicando las propiedades utilizadas.

b) Definir formalmente

$$\lim_{x\to c^+} g(x) = L$$

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación



(1 Pto c/u)

d) Hallar $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$

e) Sabiendo que $0 < f(x) < (x-1)^2$, para $x \neq 1$. Hallar $\displaystyle \lim_{x\to 1} f(x)$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{sen(1-x)\sqrt{(1-x)^2}}{x-1}$ (3 Ptos)	b) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+10}{x+1} - \frac{x^2-1}{x+2} \right)$ (4 Ptos)
c) $\displaystyle \lim_{x\to 5} \frac{x-3-\sqrt{x-1}}{25-x^2}$ (4 Ptos)	d) $\displaystyle \lim_{x\to \pi/2} \frac{1+\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$ (3 Ptos)

3. Dada la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x+b & si \quad x<3 \\ 5 & si \quad x=3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$ (6 Ptos)

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio. (2 Ptos)

b) Probar que existe un $c \in (2,3)$, tal que: $g(c) = 6$, donde $g(t) = \dfrac{t^3+1}{t+1}$ (3 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO $_{730}$ B

Nombre: ____________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = -1 \quad y \quad \lim_{x\to 7} g(x) = 3$$

Hallar $\lim_{x\to 7}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$, indicando las propiedades utilizadas.

Solución:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)} = \frac{\lim_{x\to 5}\left(f(x)+g(x)\right)}{\lim_{x\to 5}\left(f(x)g(x)\right)}$$

$$= \frac{\left(\lim_{x\to 5} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to 5} g(x)\right)}{\left(\lim_{x\to 5} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 5} g(x)\right)}$$

$$= \frac{(-1)+3}{(-1)3} = -\frac{2}{3}$$

b) Definir formalmente

$$\lim_{x\to c^+} g(x) = L$$

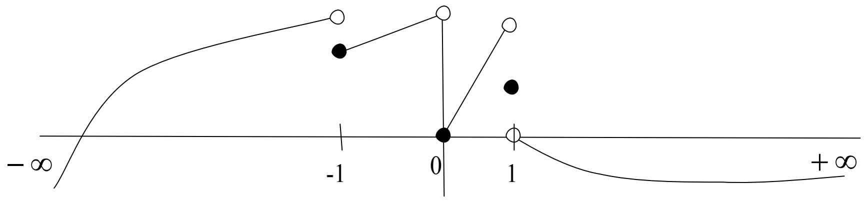
Solución:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, talque:$

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

(1 Pto c/u)

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación



Solución:

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

d) Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$

Solución:

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1-\cos(x)}{x^2} = -\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = -\frac{(1-\cos^2(x))}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= -\frac{sen^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = -\frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{x}\frac{1}{(1+\cos(x))}$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 730 B

Nombre: ______________________

Carnet: ____________ Sección: ______

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{x}\frac{1}{(1+\cos(x))}\right)$$

$$=-\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos(x))}\right)=-1\,.\,1\,.\,\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

e) Sabiendo que $0<f(x)<(x-1)^2$, para $x\neq 1$.
Hallar $\lim_{x\to 1} f(x)$

Solución:

Como $\lim_{x\to 1} 0 = 0 = \lim_{x\to 1}(x-1)^2$, entonces por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to 1} f(x)=0$$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{sen(1-x)\sqrt{(1-x)^2}}{x-1}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sen(1-x)\sqrt{(1-x)^2}}{1-x}$$

$$=\left(\lim_{x\to 1}\frac{sen(1-x)}{1-x}\right)\left(\lim_{x\to 1}\sqrt{(1-x)^2}\right)$$

$$=1\,.\,0=0$$

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+10}{x+1}-\frac{x^2-1}{x+2}\right)$ (4 Ptos)

Solución:

$$=\frac{x^2+10}{x+1}-\frac{x^2-1}{x+2}$$

$$=\frac{(x^2+10)(x+2)-(x^2-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^3+2x^2+10x+20-x^3-x^2+x+1}{x^2+3x+2}$$

$$=\frac{x^2+11x+21}{x^2+3x+2}=\frac{\left(\frac{x^2+11x+21}{x^2}\right)}{\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{1+11\frac{1}{x}+21\frac{1}{x^2}}{1+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}$$

Luego:

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO $_{730}$ B

Nombre: ____________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

$$\operatorname*{Lim}_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+10}{x+1}-\frac{x^2-1}{x+2}\right)$$

$$=-\operatorname*{Lim}_{x\to+\infty}\frac{1+11\frac{1}{x}+21\frac{1}{x^2}}{1+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1+11\,.\,0+21\,.\,0}{1+3\,.\,0+2\,.\,0}=-1$$

c) $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{x\to5}\frac{x-3-\sqrt{x-1}}{25-x^2}$ (4 Ptos)

Solución:

$$\frac{x-3-\sqrt{x-1}}{25-x^2}$$

$$=\frac{\left(x-3-\sqrt{x-1}\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}{\left(25-x^2\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)^2-(x-1)}{\left(25-x^2\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\frac{x^2-6x+9-(x-1)}{\left(25-x^2\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\frac{x^2-7x+10}{\left(25-x^2\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=-\frac{(x-2)(x-5)}{(x-5)(x+5)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=-\frac{(x-2)}{(x+5)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

Luego:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to5}\frac{x-3-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$$

$$=-\operatorname*{Lim}_{x\to5}\frac{(x-2)}{(x+5)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=-\frac{(5-2)}{(5+5)\left(5-3+\sqrt{5-1}\right)}=-\frac{3}{40}$$

d) $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{x\to\pi/2}\frac{1+\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to\pi/2}\frac{1+\tan^2(x)}{\cos^2(x)}=\operatorname*{Lim}_{x\to\pi/2}\frac{1}{\cos^4(x)}=+\infty$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO $_{730}$ B

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

3. Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} x+b & si \quad x<3 \\ 5 & si \quad x=3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

Solución:

3.1.- f es continua en $(-\infty,3)$, ya que es un polinomio.

f es continua en $(3,+\infty)$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador es no nulo en ese intervalo.

3.2.- Continuidad en $x=3$, $\left(\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)\right)$

3.2.1.- $f(3)=5$ (6 Ptos)

3.2.2.- $\lim_{x\to 3} f(x)$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x+b)=3+b$

y $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x-2}=2-a$

Luego el limite existe si se satisface: $3+b=2-a$

Por lo tanto f es continua en $x=3$, si se satisface: $3+b=2-a=5$

Es decir: $\begin{cases} 3+b=5 \\ 2-a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=-3 \end{cases}$

f es continua en todo $\mathbb{R}$, si se toman los valores $a=-3$ y $b=2$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio.

Solución: (2 Ptos)

Sea g una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea un w un valor entre $g(a)$ y $g(b)$, entonces existe un $c\in(a,b)$, talque: $g(c)=w$

b) Probar que existe un $c\in(2,3)$, tal que: $g(c)=6$, donde $g(t)=\dfrac{t^3+1}{t+1}$

Solución: (3 Ptos)

$g(2)=3$ y $g(3)=\dfrac{26}{4}=\dfrac{13}{2}$, como $g(2)<6<g(3)$ y la función es continua en $[2,3]$, se puede aplicar el teorema del valor intermedios y en consecuencia, existe un $c\in(2,3)$, talque: $g(c)=6$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado